

ДОСМАҒҰЛОВА ҚАРЛЫҒАШ АЛМАТҚЫЗЫ

КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА РИМАНОВОЙ СФЕРЕ С РАЗРЕЗАМИ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «8D05401-Математика»

Актуальность темы исследования. Первые успехи теории общих краевых задач для эллиптических уравнений обусловлены методом потенциалов, который сделал возможным эквивалентное сведение краевой задачи к регулярному интегральному уравнению. В частности, применение теории Фредгольма к краевым задачам сделало возможным утверждать, что ядро и коядро оператора краевой задачи являются конечномерными.

Принимая во внимание вышеуказанные источники, мы ставим основную цель настоящей диссертации.

Для достижения наших целей поставлены следующие задачи:

1. Рассмотреть оператор Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, из которой удалена одна точка. Построить функцию Грина и записать корректно разрешимую задачу. Исследовать спектр оператора.
2. Рассмотреть оператор Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, из которой вырезана дуга. На основе уже полученных результатов построить корректно разрешимую задачу.
3. Рассмотреть оператор Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере из четырёхмерного пространства, из которой вырезана окружность, не являющаяся гиперплоскостью. Построить корректно разрешимую задачу для этого случая.

Цели и задачи исследования. Основная цель – построить корректные задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере и развить спектральную теорию некоторого дифференциального оператора на римановых многообразиях.

Основные положения, выносимые на защиту диссертации:

- 1) Исследование корректной разрешимости оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой двумерной сфере и формулировка максимального оператора и его обратимых ограничений. Исследование функции Грина оператора Лапласа-Бельтрами с конечным числом проколотых точек. Исследование спектральных свойств оператора Лапласа-Бельтрами с δ -образными возмущениями;
- 2) Формулировка разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, проколотой открытой кривой. Исследование единственности разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, проколотой открытой кривой;

- 3) Формулировка разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере, проколотой замкнутой кривой. Исследование единственности разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере, проколотой замкнутой кривой;
- 4) Постановка спектральной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами и возмущённого гармонического осциллятора. Исследование спектральных свойств операторов.

Объекты исследования – дифференциальные операторы на римановых многообразиях.

Предмет исследования – корректная разрешимость и единственность разрешимых задач, свойства их решений.

Методы исследования. Методы исследования для решения корректно разрешимых задач для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрезами, как правило, включают сочетание математического анализа, дифференциальной геометрии и численных методов.

Разработан математический каркас для представления римановой сферы с разрезами. Это включает использование дифференциальной геометрии для описания поверхности, рассмотрение существования разрезов как топологических особенностей и определение оператора Лапласа-Бельтрами в этих рамках.

Также сформулировано уравнение в частных производных, включающее оператор Лапласа-Бельтрами на поверхности с разрезами. Оно может включать члены для оператора Лапласа-Бельтрами, граничные условия и любые дополнительные члены, относящиеся к исследуемой задаче.

Доказаны условия существования и единственности решений. Этот шаг является ключевым в установлении корректно разрешимых задач. Он часто включает применение теорем из функционального анализа и теории уравнений в частных производных.

Изучается топология римановой сферы с разрезами, а также поведение разрезов, их расположение и влияние на геометрию поверхности.

Новизна исследования. Исследование «Корректно разрешимые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрезами» вводит новый и инновационный подход к решению математических задач, связанных с оператором Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрывами или разрезами.

Исследование рассматривает оператор Лапласа-Бельтрами в контексте римановых сфер, имеющих разрывы или разрезы. Это отличается от традиционного анализа, который часто предполагает гладкие, непрерывные многообразия. Введение разрезов значительно расширяет диапазон задач, которые могут быть рассмотрены.

Термин «корректно разрешимые задачи» означает строгий и чётко определённый подход к нахождению решений. Исследование вводит систематическую структуру для определения того, какие задачи с оператором Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезами могут быть корректно решены. Это

включает выявление условий, при которых решения существуют и являются единственными.

Работа исследует взаимодействие между геометрическими и топологическими аспектами римановых сфер с разрезами. Это взаимодействие имеет ключевое значение для понимания поведения оператора Лапласа-Бельтрами в таких нестандартных условиях и даёт более глубокое понимание геометрии этих поверхностей. Понимание оператора Лапласа-Бельтрами на поверхностях с разрезами может быть актуально для задач, связанных с теплопроводностью, распространением волн и анализом данных на поверхностях неправильной формы.

В исследовании представлены новые математические инструменты и методы решения уравнений в частных производных на таких поверхностях. Эти инструменты могут иметь более широкие применения в математике и открывать новые направления исследований.

Наличие разрезов создаёт вычислительные трудности при решении задач, связанных с оператором Лапласа-Бельтрами. Исследование может рассматривать или предлагать новые методы преодоления этих трудностей, что является важным вкладом для исследователей, работающих над численным моделированием.

В заключение, новизна данного исследования заключается в изучении задач для оператора Лапласа-Бельтрами на римановых сферах с разрезами, в акценте на корректно разрешимых задачах и в его потенциальном влиянии на математику и различные прикладные области. Оно предлагает новый взгляд на дифференциальные уравнения в нестандартных геометрических условиях и открывает возможности для дальнейших исследований и практических применений.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Важность диссертационного исследования обусловлена тем, что объекты исследования, а именно оператор Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии, имеют существенное значение не только в математике, но и в таких областях, как механика, физика, биология и другие естественные науки. Кроме того, к этим задачам проявляется значительный интерес с математической точки зрения. Таким образом, полученные результаты актуальны и понятны исследователям во всём мире и могут служить ценной основой для будущих исследований.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из титульного листа, содержания, введения, предварительных сведений, четырёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 100 страниц и включает 61 литературных источников.

Основное содержание диссертации.

Во введении изложены актуальность темы исследования, цели и задачи, основные положения, выносимые на защиту, объекты и предметы исследования, связь темы диссертации с другими научными работами, апробация работы, публикации автора, объём и структура диссертации и её содержание.

В первой главе изучаются δ -подобные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии без границы. Рассматривается также двумерная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ как риманово многообразие. Аналогичные построения могут быть выполнены для оператора Лапласа-Бельтрами на гладких многообразиях без границы. Другие возможности связаны с описанием корректных ограничений линейных дифференциальных операторов на гладких многообразиях с границей. Наконец, представляет интерес задача описания корректно поставленных задач для эллиптических дифференциальных операторов производного порядка на многообразиях с границей, состоящей из компонент разной размерности. Также введена функция Грина для возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами, определённого на двумерной сфере. Даны описания линейных функционалов для произвольной точки проколотовой сферы. Приведены выражения функции Грина $\varepsilon_\gamma(x, t)$ через $\varepsilon(x, t)$.

В второй главе из сферы удалена фиксированная дуга, исследуются дополнительные условия, которым должно удовлетворять решение на удалённой дуге для обеспечения единственности такого решения.

В третьей главе удалена окружность на трёхмерной сфере в четырёхмерном пространстве. Требуется описать корректно разрешимые задачи для уравнения Лапласа-Бельтрами на полученной области. Рассматривается класс таких задач для уравнения Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере с разрезом по окружности.

В четвертой главе изучаются собственные функции возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами, определённого на двумерной сфере. Даны описания линейных функционалов для произвольной точки проколотовой сферы. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора, приведено полное описание системы собственных функций. В работе доказано дискретность спектра оператора Лапласа-Бельтрами на проколотовой двумерной сфере. Также приведён пример линейных непрерывных функционалов. Пример является явным применением теоремы, доказательство которой использовало ранее полученные результаты для возмущённого оператора. Инвариантность оператора Лапласа-Бельтрами относительно изометрий влечёт совпадение спектров операторов Лапласа-Бельтрами на изометрических римановых многообразиях.

Во второй части главы 4 изучены собственные функции возмущённого гармонического осциллятора. Даны описания линейных функционалов для произвольной точки. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями возмущённого и невозмущённого операторов. В работе доказано дискретное свойство спектра гармонического осциллятора на прямой оси. Пример является явным применением теоремы, доказательство которой использовало ранее полученные результаты для возмущённого оператора.

В заключении представлены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

Связь темы диссертации с другими научными исследованиями.

Тема диссертации поддержана в рамках научного проекта грантового финансирования молодых учёных в рамках проекта «Жас ғалым» на 2024–2026 годы Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан «Корректно поставленная задача для дифференциальных операторов на римановом многообразии» (2024–2026 гг., АР АР22685565). Работа соответствует приоритетным направлениям развития науки: интеллектуальный потенциал страны, подпункт — фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии.

Публикации и вклад автора. По результатам диссертации опубликовано 11 работ: 6 статьи в журналах, индексируемых в Scopus, и 5 работ в материалах международных научных конференций.

Некоторые из них:

- 1) Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A. Well-posed problems for the Laplace–Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere // *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Applications*. – 2023. – Vol. 7, No. 2. – P. 428–440.
- 2) Dosmagulova K., Kanguzhin B. Uniquely solvable problems for the Laplace–Beltrami operator on a sphere punctured by a curve // *Results in Nonlinear Analysis*. – 2023. – Vol. 6, No. 3. – P. 43–49.
- 3) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E., Fazullin Z.Y. Spectrum of the perturbed harmonic oscillator // *Applied Mathematics and Information Sciences*. – 2023. – Vol. 17, No. 4. – P. 553–557.
- 4) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E. Green’s function of the perturbed Laplace–Beltrami operator with a finite number of punctures on the two-dimensional sphere // In: *Women in Analysis and Partial Differential Equations*. Series: Trends in Mathematics. – Vol. 5. – Cham: Birkhäuser, 2024. – P. 145–151.
- 5) Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A., Akanbay Y.E. On the Laplace–Beltrami operator in stratified sets composed of punctured circles and segments // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. – 2025. – Vol. 125, No. 1. – P. 33–42.
- 6) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E. Well-posed problems for the Laplace–Beltrami operator // *Symmetry*. – 2025. – Vol. 17, No. 9. – P. 1–12.